Une situation problème à intérêts multiples

La situation originale, issue de la revue Math-Ecole (1993, p. 20), provient d'un concours mathématiques alors que la même situation, adaptée de Bélisle, J.-G. (1999), est exploitée dans le développement du « plaisir » à résoudre des problèmes[1]. Nous avons décidé de présenter ce problème, car les diverses expérimentations que nous avons faites, nous permettent maintenant d'en apprécier la richesse et de rendre compte de son potentiel. En effet, ayant eu l'opportunité de travailler auprès de populations de l'enseignement primaire (classe d'accueil, au régulier) et secondaire (adaptation scolaire, milieu défavorisé, etc.), nous avons toujours été curieuse de leur conduite devant un tel énoncé. Chaque fois, la situation a démontré sa robustesse, mais elle a également mis à l'épreuve sa gestion. Cela nous a amené à développer différents outils pour en faciliter la gestion. D'ailleurs, le fait de connaître différentes démarches possibles avant de présenter la tâche à l'élève facilite grandement ce travail. Il nous est plus facile d'interpréter le raisonnement de l'élève et de l'accompagner. Enfin, la prolongation de ce travail par différents intervenants du milieu et les différentes adaptations[2] qu'ils ont réalisées alimenteront cette vignette.

Nous présenterons donc la situation et nous discuterons ensuite de sa gestion, de ses intérêts, de ses objectifs potentiels, de même que des adaptations possibles. Il faut dire que le principal intérêt de cette situation, au même titre que celle de l'autobus[3], réside dans la diversité des outils de modélisation possibles pour résoudre ce problème.

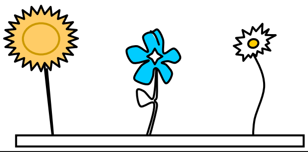
---

[1] Il est à noter que nous nous appuyons sur les quatre caractéristiques suivantes pour considérer cet énoncé comme problème : 1) un problème c'est une situation ; 2) dans laquelle un but est visé ; 3) mais dont les moyens pour l'atteindre sont inconnus ; 4) il n'y a problème que si le sujet s'y engage consciemment.

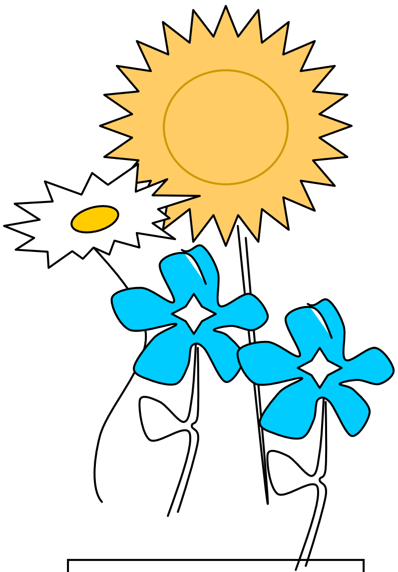
[2] Par exemple, soumettre le problème: 1) par écrit et par dessins pour voir les différences [résolution, motivation, etc.] ; 2) et comparer les conduites d'élèves en grandes difficulté et d'élèves inscrits à des programmes enrichis.

[3] Extrait des Actes de colloque du groupe canadien de didactique des mathématiques. Téléchargé : http://publish.edu.uwo.ca/cmesg/ , p.42.)

Dites-le avec des fleurs

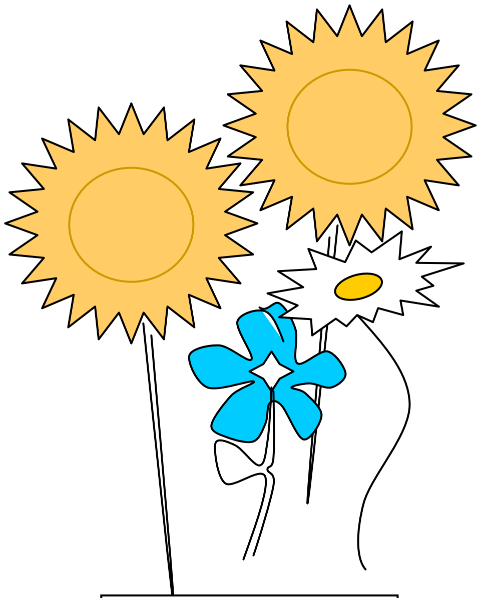


A



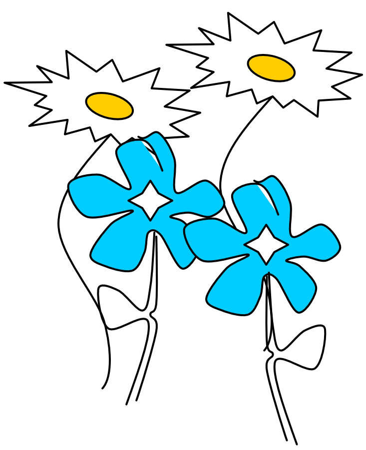
15,00 $

B



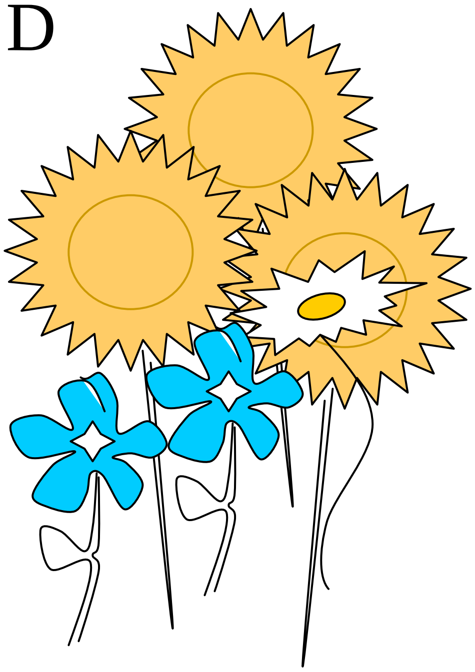
14,50 $

C



17,00 $

D



$

Dites-le avec des fleurs !

Matériel nécessaire:

- Le problème précédent en couleur
- Quelques versions agrandies (11 x 17) du problème ou tout autre moyen (ex.TBI) pour supporter de façon visuelle l'exposé des élèves lors du retour sur leurs démarches.
- Des indices (annexe 1)

Il est intéressant de permettre aux élèves de consulter au besoin des indices qui conservent leur engagement cognitif dans la tâche. Pour ce faire, il est possible d'exploiter les indices selon trois types d'environnement (Julo, 1998) : 1) **aide conditionnelle** : si l'élève présente une difficulté particulière alors je l'associe à une aide et lui présente que sous cette condition; 2) **aide disponible** : je dis aux élèves qu'il y a plusieurs aides possibles et qu'elles seront disponibles à un endroit x; 3) **aide immédiat** : elles apparaissent dans le cahier de l'élève.

Si demandée par les élèves, la réponse est mise à leur disposition. En procédant ainsi, j'émets un important message : ce n'est pas la réponse qui est importante.

Le déroulement d'une période de résolution de problèmes

a) Présentation de la situation

Cette présentation est très importante, elle permet non seulement de stimuler leur intérêt, mais également de faire les choix didactiques permettant de jouer sur les habitudes, croyances et perceptions contre-productives des élèves en résolution de problèmes. Dans le cadre de cette tâche, nous avons décidé de proposer l'entrée suivante (modifier les villes au besoin) :

> *Si tu avais à partir de l'école et te rendre au Canadian Tire de Buckingham, quel chemin prendrais-tu? Pourquoi?*
> *Est-ce qu'il y a un chemin plus* ***économique*** *que l'autre? (Temps/ Consommation d'essence/ KM?) Aujourd'hui, nous vous proposons une activité dans laquelle vous devrez choisir votre propre chemin pour arriver à résoudre une situation problème.*
> *Il y a presque autant de chemins que d'élèves dans la classe.*

Selon le mode d'environnement choisi, vous présentez ou non les indices. Pour notre part, nous y avons eu rarement recours. Nous préférons ne pas influencer le travail de l'élève.

b) Résolution

Lors de la résolution de problèmes, il est important de ne pas trop intervenir. Le rôle s'étant avéré le plus bénéfique auprès d'élèves en difficultés d'apprentissage au cours des expérimentations a été de valoriser leurs observations, leurs raisonnements et de les encourager à poursuivre (sans leur dire comment). Le type de question suivant: « Qu'est-ce que tu remarques ? Qu'est-ce que tu observes ? » est une pratique gagnante, car il est impossible de « rien voir ». Le simple fait de remarquer qu'il y a toujours quatre fleurs et que les prix varient, par exemple, est digne de mention. En effet, cela permet de reconnaître qu'il y a des fleurs qui sont plus chères que d'autres, de déterminer lesquelles le sont davantage et également d'estimer le résultat (Le bouquet « D » coûtera plus que…). Il est possible de remplir la grille d'observation à ce moment ou simplement de l'utiliser pour compiler les procédés des élèves et faire le choix des productions pour le retour.

La mise au travail des élèves se fait en trois phases.

1. Observation individuelle, sans crayon (5 minutes)

2. Observation et/ou résolution individuelle avec crayon (5 minutes)

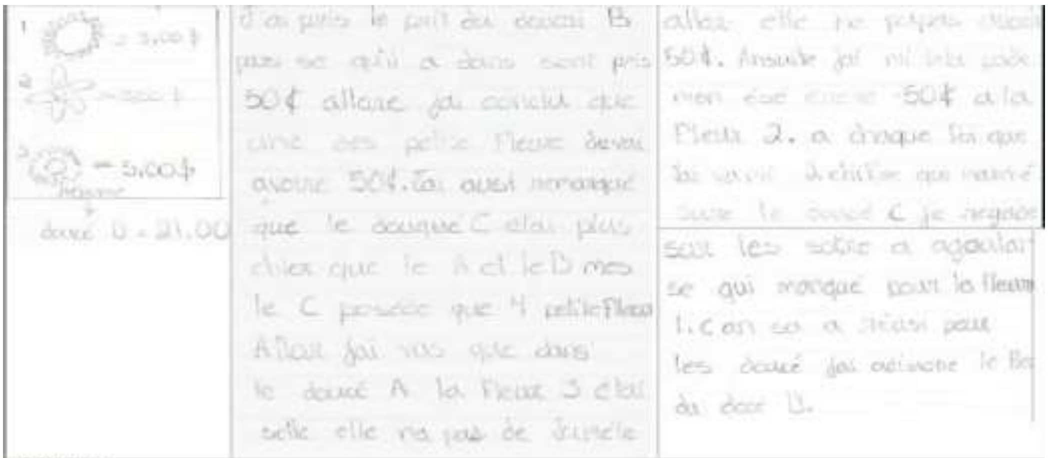
3. En dyade, résoudre la tâche en prenant des notes, non pas des calculs, mais de ce qu'ils observent. Que remarques-tu? Quelles sont les différences? Quelles sont les ressemblances? La prise de note peut se faire en cours de route ou lorsqu'ils ont terminé de le résoudre.

Voici quelques exemples de formulation d'élèves à la suite de la question, ***qu'est-ce que tu as remarqué?***

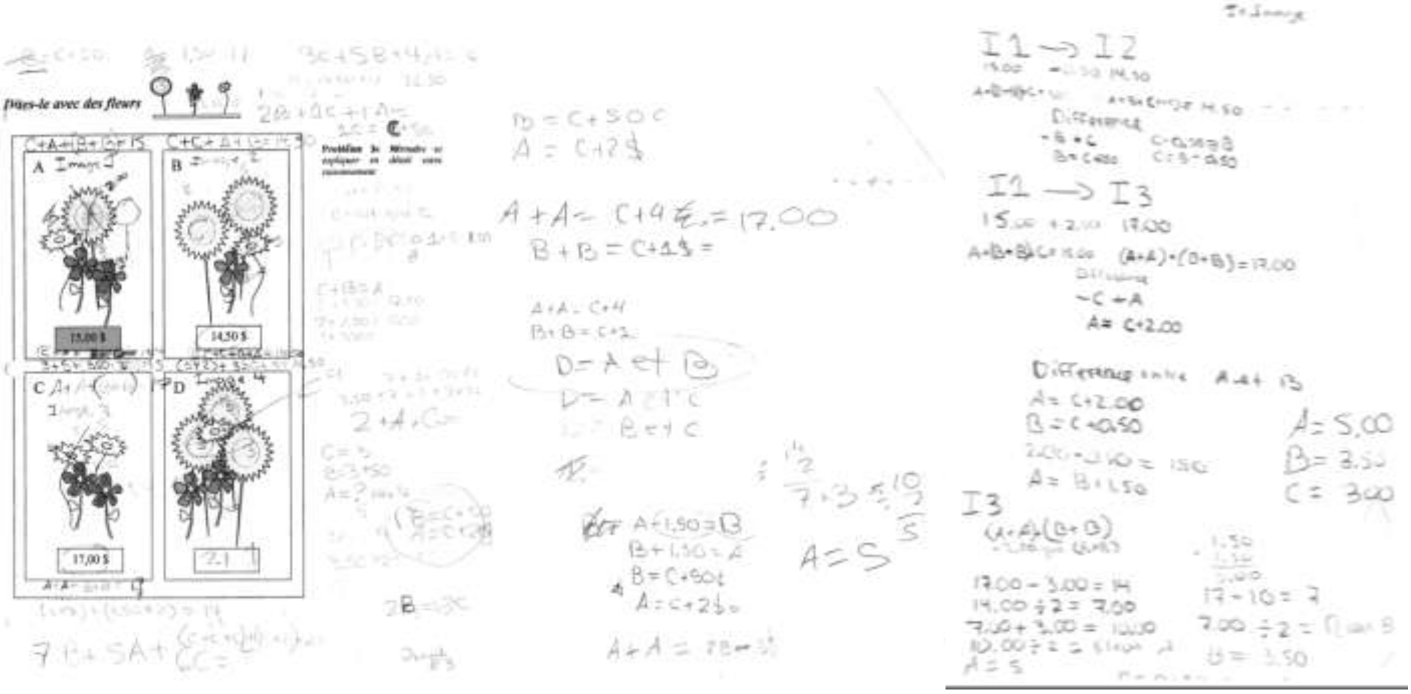
- *C'est toutes les mêmes fleurs, mais à des prix différents*
- *C'est ben moins cher quand il y a ces grosses fleurs, ça en prendrait plus pour faire le même prix*
- *Les jaunes sont les moins chères*
- *Il y en a une qui n'arrive pas pile… quelque chose et 50 cents…c'est la noire*
- *Ça coûte plus cher le bouquet D, car il y a plus de fleurs. C'est à peu près 20$*
- *[bouquet C] : 15 ÷ 4 = 3,75…marche pas…*
- *[compare A et C] : La grosse est 2$ de moins que la petite blanche*

Généralement les élèves ne reconnaissent pas la pertinence de ces observations, seuls les calculs leur semblent importants. Ces observations et les raisonnements qui en découlent feront partie du retour. Nous vous présenterons des exemples.

Lorsque tout est terminé, ils peuvent transcrire leur raisonnement et préparer une affiche grand format. Plusieurs démarches seront présentées au forum. Voici deux exemples contrastés dans une même classe:



Son texte :
j'ai pris le prix du bouquet B parce qu'il a dans son prix 50c alors j'ai conclu qu'une des petites fleurs devaient avoir 50c… J'ai aussi remarqué que le bouquet C était plus cher que le A et le B mais le C possède que 4 petites fleurs. Alors j'ai vu que dans le bouquet A la fleur 3 (blanche) était seule… elle n'avait pas de jumelles alors elle ne pouvait avoir 50c. Ensuite, j'ai mi un total avec 50c à la fleur noire. A chaque fois que j'ai mis 2 chiffres qui marchent sur le bouquet C je regarde sur les autres à ajouter qui manque pour la grosse fleur 1. Quand ça a réussi pour les bouquets j'ai additionné les fleurs du bouquet D.



c) Communication de solutions [une période différente de la précédente] : explication par les élèves de leur raisonnement avec l'appui d'une affiche.

Au cours de nos réalisations, il s'est toujours avéré plus payant de faire le retour une autre journée. D'une part, cela permet aux élèves de prendre du recul et, d'autre part, à l'enseignante de prendre connaissance des productions, de les analyser et de faire la sélection de celles qui feront l'objet du retour selon la diversité et l'économie des chemins et, enfin, de choisir l'ordre de présentation. Tous ces choix sont déterminants dans la gestion de cette tâche et dans l'exploitation de son potentiel (Butlen, 2010). L'ordre permet notamment aux élèves de faire un pas de plus et de comprendre une résolution de plus en plus complexe.

Par ailleurs, l'utilisation d'un support visuel facilite la compréhension des relations et appuie l'explication des étudiants qui n'est pas toujours claire. L'enseignante traduire sur l'affiche au fur et à mesure que l'élève explique. Elle peut également reformuler, mais la tâche principale revient à l'élève. L'enseignante questionnera davantage pour permettre aux élèves de faire ressortir l'importance ***de prendre le temps*** de s'attarder aux représentations, aux nombres, à leur relation, de les comparer : regarder ce qu'elles ont en commun, ce qu'elles ont de différent afin de trouver le chemin le plus économique. Il est souvent ressorti lors des expérimentations que ce n'est pas forcément celui qui a utilisé les connaissances les plus « avancées/évoluées » qui a été le meilleur, mais celui qui a pris le temps de s'arrêter… D'ailleurs, une élève disait : « plus tu prends ton temps, plus ça va vite ! »

d) Auto-évaluation de l'activité

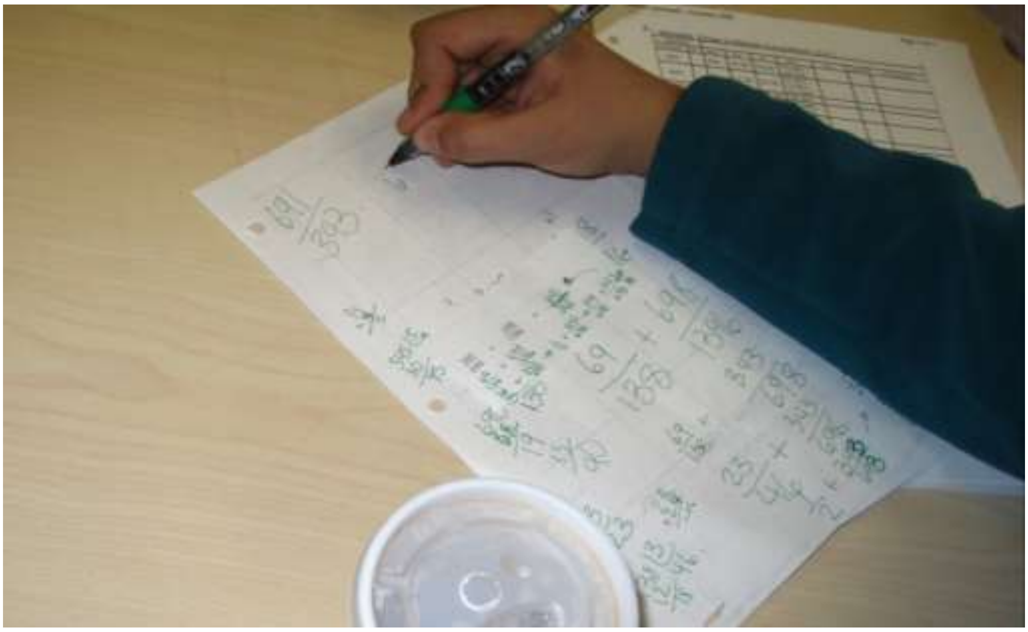
Enfin, il est possible de faire remplir une auto-évaluation par les élèves qui est fort instructive pour l'enseignante. Nous reproduisons ci-dessous quelques exemples. Il y a également la possibilité de remettre un certificat de *Mise en œuvre de pratiques mathématiciennes!*

> *10/10, car j'ai tout noté mes étapes et qu'avec mes observations, j'ai réussi à trouver la réponse dès la première fois.*

> *8,5/10: parce que j'ai trouvé la théorie, puis j'ai écrit les explications sauf que si j'avais fait le calcul je me serais donné 10, mais c'est mon coéquipier qui l'a fait*
>
> *Je me donne* ***9/10,*** *car moi et X au début comprenait vraiment pas puis on se disait : je sais pas c'est quoi, on ne le trouvera pas ! Mais là on s'est concentré puis on les a toutes réussies. Hi hi hi! Donc 9/10 pour nous dire qu'au début on ni pensait même pas mais nous l'avons réussie.*
> *// Moi je trouve qu'on mériterait* ***8/10*** *parce qu'au début on avait beaucoup de misère, mais à la fin on a très bien compris.*
>
> *9/10: parce que j'ai observé le problème et j'ai calculé et j'ai compris le problème et je l'ai résolu.*

Différents exemples d'auto-évaluation et des pistes de travail seront présentés dans le cadre du forum.

Discussions
Dernièrement, ce qui m'amuse avec cette situation, c'est qu'elle est utilisée afin que les élèves ne rencontrent pas de difficultés de lecture sous prétexte que c'est ce qui pose problème à l'élève. Or, si les élèves ne rencontrent pas de difficultés avec cette situation, c'est qu'elle est mal choisie, qu'elle n'est pas une situation problème pour eux. Ainsi un des intérêts est-il de montrer que les difficultés ne résident justement pas dans la lecture, mais que le problème est d'abord et avant tout mathématiques ! Elle peut provenir notamment de leurs conceptions des mathématiques, de leur travail d'élève (contrat didactique), etc. D'ailleurs, il s'est avéré que plus les gens à qui cette situation a été soumise étaient âgés ou performants, plus ils avaient de la difficulté à la résoudre ! D'ailleurs, si vous n'êtes pas convaincu que s'attarder aux nombres et à leur relation avant d'agir le plus efficacement possible n'est pas une priorité, qu'il s'agit d'une pratique mathématique féconde à développer chez nos élèves le plus tôt possible, je vous convie à prendre connaissance de cette étudiante universitaire qui a fait toute une démarche pour trouver le résultat de : 345/690 + 698/1396 =



Ainsi cette situation peut-elle viser divers objectifs et rejoindre plusieurs intérêts selon les élèves avec qui nous travaillons. Nous aurons l'occasion d'en discuter plus longuement, mais nous présentons quelques exemples.

<u>Intérêt de ce problème</u>

1. Modification du contrat didactique (Brousseau, 1980)
2. Possibilité de modifier sa position d'élève dans la classe (Sarrazy, 2002)
3. Possibilité de ne pas substituer un travail de compréhension de lecture à celui d'un réel travail mathématique. (Houdement, 2003, etc.)
4. Validation par le milieu (Brousseau, 2010 ; Theis et Gagnon, 2013)
   a. Il est toujours possible d'avoir la bonne réponse, car un bouquet sert de validation.
5. Confrontation de l'élève à plusieurs conceptions erronées des mathématiques, de la résolution de problèmes

La solution apparaît rapidement ou pas du tout (Mason, 2003, p.79) Les problèmes mathématiques se résolvent toujours en moins de 10 minutes (Schoenfled, 1989)
Quand tu connais une règle et comment l'appliquer étape par étape, tu peux résoudre un problème (Mason, 2003, p.80)
En philosophie, tu dois te demander pourquoi, aussi en histoire, mais en mathématiques, tu dois appliquer une règle, une formule (Mason, 2003, p.80)
Lorsque l'enseignante me donne un problème, il y a toujours une et une seule solution (Poirier, 2001)
Seuls les génies sont capables de découvrir ou de créer des mathématiques. (Schoenfled,1989)
Pour résoudre un problème, il faut faire une opération, il faut utiliser les dernières notions étudiées. (Poirier, 2001)

<u>Les objectifs visés :</u>

a) Faciliter la transition arithmétique-algèbre
b) développer le plaisir de résoudre des problèmes
c) développer le goût de la recherche, de l'observation et des capacités à établir des relations, à chercher.
d) développer des stratégies pour résoudre des problèmes nouveaux ou complexes
e) développer des stratégies pour communiquer la solution d'un problème
f) évaluer les connaissances ou procédures mathématiques à améliorer ou à développer
g) Intervenir sur certaines hypothèses explicatives sur les difficultés rencontrées par les élèves en résolution de problèmes issues de la comparaison entre les experts et les novices (Krutetskii,1976; Hinslay,Hayes & Simon,1977; Mayer,1983; Schoenfeld 1985). Nous présentons quelques exemples ci-dessous

Figure 1 : Illustration du temps consacré à chaque étape de résolution d'une situation-problème mathématique chez un élève novice (Shoenfeld, 1985, p. 296)

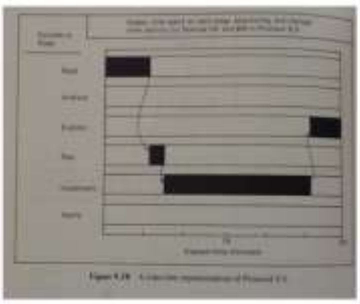
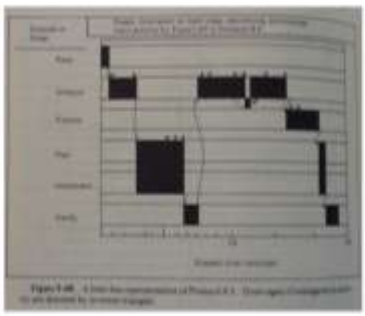


Figure 2 : Illustration du temps consacré à chaque étape de résolution d'une situation-problème mathématique chez un élève expert (Shoenfeld, 1985, p. 312)



Chez les élèves jugés faibles, nous constatons le peu de temps accordé aux phases d'analyse et de **représentation** des problèmes; le recours à une démarche linéaire et l'incapacité de repenser cette démarche, même si elle les mène à une impasse; l'absence fréquente de phases de vérification de leur solution à un problème.

Experts : les élèves jugés forts retiennent peu de détails numériques et de faits spécifiques; ils retiennent par ailleurs la structure formelle des problèmes. **Novice :** les élèves jugés faibles ou moyens retiennent, au contraire, des faits numériques et des éléments spécifiques du contexte pratique des problèmes.

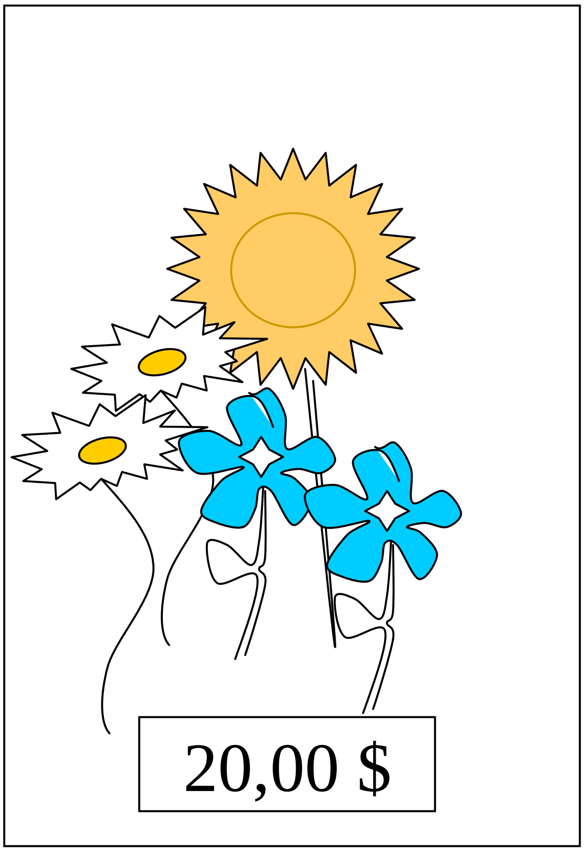
Experts : les élèves jugés forts effectuent très fréquemment des retours en arrière, essayant de compléter ou de modifier leurs premières représentations du problème ou, encore, abandonnant une piste pour en explorer une autre. **Novices** : les élèves jugés faibles déploient une démarche très linéaire, laissant peu ou pas de place à la phase d'analyse et de vérification de leurs solutions.

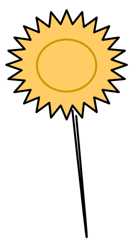
ANNEXES

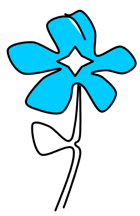
ANNEXE 1 : EXEMPLES D'INDICE

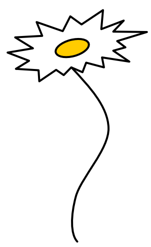
Indice	*Dites-le avec des fleurs* Observe bien le bouquet C.

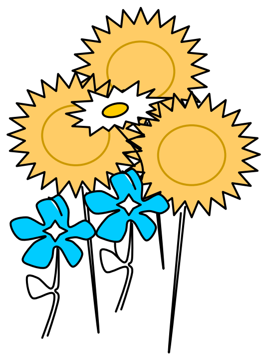
Réponse	*Dites-le avec des fleurs* Le dernier bouquet coûte 21,00$











$	**$**	**$**	**$**

ANNEXE 2 : EXEMPLE D'AUTO-ÉVALUATION

Sur une échelle de 1 à 10, quelle note te donnerais-tu pour le travail que tu as fait en mathématiques aujourd'hui?

1 2 3 4 5 6 7 8 9 10

Pourquoi?

____

____

____

____

ANNEXE 3 : GRILLE D'OBSERVATION

Groupe de ________________________________ Date : ____

STRATÉGIE ÉQUIPE ÉLÈVES	Essaie erreur sans relation apparente	50 cents	Relation A et B (0,50$)	Relation A et C (2$)	a. Bouquet C (/2) b. Bouquet B pour trouver prix grosse c. Bouquet A pour trouver prix noire	Composition du bouquet D	Autre déduction Difficultés